Mécanique classique | Chapitre 4 | Correction TD (M4)

Exercice n°1 • Travail d'une force de frottement fluide *cours*

L'équation horaire du mouvement est $x(t) = x_0 \cos(\omega t)$ (l'origine des temps est arbitraire, inutile de rajouter une phase à l'origine). Sa vitesse est donc : $v(t) = -x_0\omega \sin(\omega t)$. On en déduit le travail sur une période :

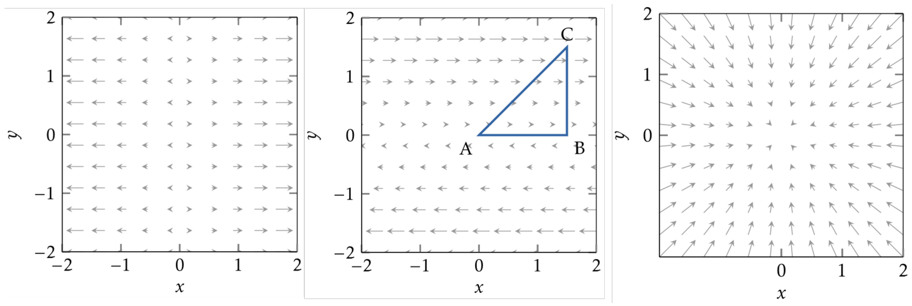
$$W_T\left(\vec{f}\right) = \int_{1\text{ AR}} \delta W = \int \vec{f} \cdot d\overrightarrow{OM} = \int_0^T \vec{f} \cdot \vec{f}\, dt = -\alpha x_0^2\omega^2 \int_0^T \sin^2(\omega t)\ dt$$

On reconnaissant la valeur moyenne d'un sinus carré.

$$W_T\left(\vec{f}\right) = -\alpha x_0^2\omega^2 T \cdot \langle\ \sin^2(\omega t)\ \rangle = -\frac{\alpha x_0^2\omega^2 T}{2} = \boxed{-\pi\alpha x_0^2\omega}$$

Exercice n°2 • Forces conservatives et non-conservatives *cours*

1) On a, pour $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ et $\vec{F}_3$ respectivement :



2) La force $\vec{F}_1$ est dirigée selon $\vec{u}_x$. On cherche donc $\mathcal{E}_{p,1}$ tel que :

$$\vec{F}_1 = -\overrightarrow{\text{grad}}(\mathcal{E}_{p,1}) = -\frac{d\mathcal{E}_{p,1}}{dx}\ \vec{u}_x$$

On identifie immédiatement :

$$\boxed{\mathcal{E}_{p,1}(x) = -\frac{1}{2}kx^2}$$

3) Non car la force est conservative.

$$\begin{aligned} W_{M_1M_2}\left(\vec{F}_1\right) &= \int_{M_1}^{M_2} \vec{F}_1 \cdot d\overrightarrow{OM} = \int_{M_1}^{M_2} -\overrightarrow{\text{grad}}(\mathcal{E}_{p,1}) \cdot d\overrightarrow{OM} \\ &= \int_{M_1}^{M_2} -d\mathcal{E}_{p,1} = -\mathcal{E}_{p,1}(M_1) + \mathcal{E}_{p,1}(M_2) = \boxed{\frac{1}{2}k\left(x_2^2 - x_1^2\right)} \end{aligned}$$

4) On considère le chemin fermé A$(0,0)$, B$(x_0,0)$ et C(x_0,y_0). On a :

$$\begin{aligned} \oint_{ABCA} \vec{F}_2 \cdot d\overrightarrow{OM} &= \int_A^B k\, y\, \vec{u}_x \cdot dx\, \vec{u}_x && = 0 \quad \text{car : } y = 0 \\ &+ \int_B^C k\, y\, \vec{u}_x \cdot dy\, \vec{u}_y && = 0 \quad \text{car : } \vec{F}_2 \perp \vec{u}_y \\ &+ \int_C^A k\, y\, \vec{u}_x \cdot (-dx\, \vec{u}_x - dy\, \vec{u}_y) && = k\int_C^A y(x)\ dx \end{aligned}$$

On en déduit :

$$W_{ABCA}\left(\vec{F}_1\right) = \oint_{ABCA} \vec{F}_2 \cdot d\overrightarrow{OM} = k\int_C^A \frac{y_0}{x_0}\, x\, dx = \frac{ky_0}{x_0}\left[\frac{x^2}{2}\right]_C^A = \boxed{\frac{kx_0y_0}{2}} \neq 0$$

Le travail sur la courbe fermée est donc non nul ce qui équivaut à dire que le travail dépend du chemin suivi. En effet, s'il existait une fonction $\mathcal{E}_{p,2}$, on aurait comme pour la question 3 :

$$W_{ABCA}\left(\vec{F}_2\right) = \int_A^A -d\mathcal{E}_{p,2} = -\mathcal{E}_{p,2}(A) + \mathcal{E}_{p,2}(A) = 0$$

5) De même que pour la première force, on cherche $\mathcal{E}_{p,3}(x,y)$ tel que :

$$\vec{F}_3 = -\overrightarrow{\text{grad}}(\mathcal{E}_{p,3}) = -\frac{\partial\mathcal{E}_{p,3}}{\partial x}\ \vec{u}_x - \frac{\partial\mathcal{E}_{p,3}}{\partial y}\ \vec{u}_y$$

On identifie alors :

$$\boxed{\mathcal{E}_{p,3}(x,y) = \frac{1}{2}k\left(x^2 + y^2\right)}$$

6) On rappelle que : $r = \sqrt{x^2+y^2}$. Ainsi :

$$\boxed{\mathcal{E}_{p,3}(r) = \frac{1}{2}kr^2}$$

Remarque : on aurait pu trouver directement le résultat :

$$\overrightarrow{F}_3 = -k\,\overrightarrow{u_r} = -\frac{d\mathcal{E}_{p,3}}{dr}\,\overrightarrow{u_r} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{E}_{p,3} = \frac{1}{2}kr^2$$

On retrouve l'énergie potentielle d'un ressort idéal de longueur à vide nulle et dont une extrémité est fixée à l'origine du repère.

Exercice n°3 • Amortisseur *cours*

1) On a :

$$\mathcal{E}_{p,p} = mgz \quad \text{et} \quad \mathcal{E}_{p,el} = \frac{1}{2}k\left(\ell - \ell_0\right)^2$$

Avec z l'axe vertical ascendant.

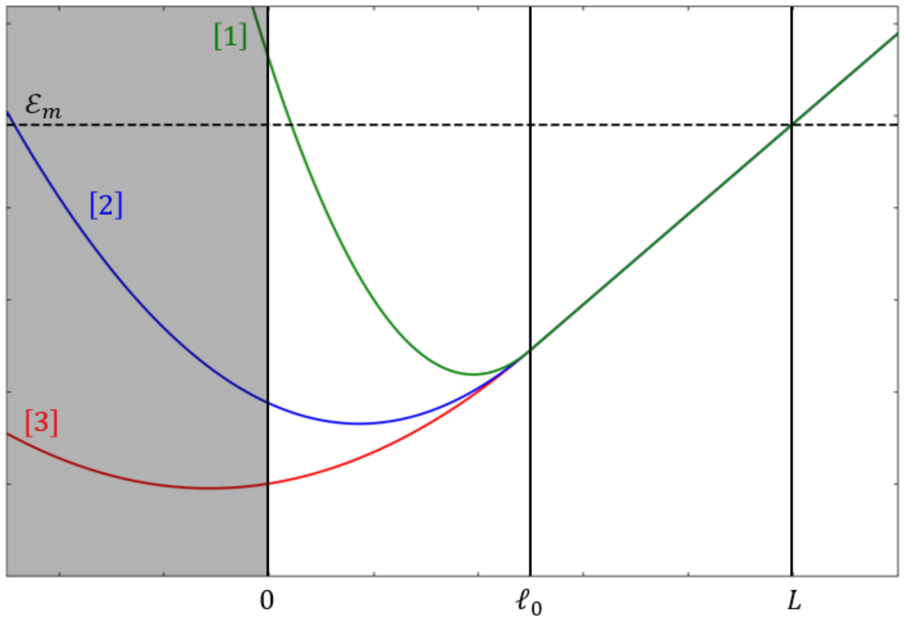
Dans notre cas, $z = x\,\sin(\alpha)$ et $\ell = x$. De plus, la masse est en contact avec le ressort uniquement si $x \leqslant \ell_0$. On en déduit donc :

$$\mathcal{E}_p(x) = \begin{cases} mgx\,\sin(\alpha) + \dfrac{1}{2}k\left(x - \ell_0\right)^2 & \text{si } x \leqslant \ell_0 \\ mgx\,\sin(\alpha) & \text{si } x \geqslant \ell_0 \end{cases}$$

2) On cherche où la dérivée s'annule.

$$\frac{d\mathcal{E}_p}{dx} = mg\,\sin(\alpha) + k\left(x - \ell_0\right) \quad \Rightarrow \quad \boxed{x_{eq} = \ell_0 - \frac{mg\,\sin(\alpha)}{k}}$$

3)



4) Cas [1] : la masse va jusqu'à la position ℓ_{min} (intersection de $\mathcal{E}_m$ et [1]) puis retourne à sa position d'équilibre (car conservation de l'énergie). Ce mouvement se répète infiniment.

Cas [2] et [3] : la masse arrive en $x = 0$ avec une vitesse non nulle ($\mathcal{E}_c(0) = \mathcal{E}_m - \mathcal{E}_p(0)$) puis se heurte contre le mur. Si le choc avec le mur est élastique (choc sans perte d'énergie), alors elles retourne à sa position d'équilibre. Ce mouvement se répète infiniment.

Différence entre [2] et [3] : dans le cas [2], la position d'équilibre est non nulle $x_{eq} > 0$, alors que pour [3] $x_{eq} = 0$ ie. que la masse s'appuie contre le mur à l'équilibre.

5) L'énergie cinétique (donc la vitesse) est maximale lorsque l'énergie potentielle est minimale. Ainsi, le TEM entre $x = L$ et $x = x_{eq}$ donne :

$$\mathcal{E}_m = \boxed{mgL\,\sin(\alpha) = \frac{1}{2}m\,v_{max}^2 + g\,x_{eq}\,\sin(\alpha) + \frac{1}{2}k\left(x_{eq} - \ell_0\right)^2}$$

6) Le TEM entre $x = L$ et $x = \ell_{min}$ donne :

$$\mathcal{E}_m = \boxed{mgL\,\sin(\alpha) = g\,\ell_{min}\,\sin(\alpha) + \frac{1}{2}k\left(\ell_{min} - \ell_0\right)^2}$$

Exercice n°4 • Freinage ★☆☆

1) On souhaite aucune variation de vitesse, donc d'énergie cinétique. On note $\mathcal{P}_m$ la puissance du moteur et $\mathcal{P}_f$ la puissance de la force de frottement. Se sont les deux seules forces qui travaillent (le poids et la réaction normale du support ne travaillent pas, car orthogonales au mouvement). Le TPC donne :

$$\frac{d\mathcal{E}_c}{dt} = 0 = \mathcal{P}_m + \mathcal{P}_f = \mathcal{P}_m - \mu m g v_0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mathcal{P}_m = \mu m g v_0 = 170 \text{ kW}}$$

2) Le TEC entre le le moment où le moteur est coupé et le moment où la voiture s'immobilise donne :

$$\Delta\mathcal{E}_c = 0 - \frac{1}{2}mv_0^2 = \mathcal{P}_f = -\mu m g d \quad \Rightarrow \quad \boxed{d = \frac{v_0^2}{2\mu g} = 166 \text{ m}}$$

3) La même équation (avec $\mu = 0,3$) donne :

$$-\frac{1}{2}mv_1^2 = -\mu m g d \quad \Rightarrow \quad \boxed{v_1 = \sqrt{2\mu g d} = 113 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1}}$$

Exercice n°5 • Opérateur gradient ★☆☆

1)

$$\boxed{\overrightarrow{v} = \overrightarrow{\text{grad}}(\phi) = v_0\left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right)\cos(\theta)\ \overrightarrow{u_r} - v_0\left(1 + \frac{R^2}{r^2}\right)\sin(\theta)\ \overrightarrow{u_\theta}}$$

2) Si $r \gg R$, la vitesse devient :

$$\boxed{\overrightarrow{v} \simeq v_0\cos(\theta)\ \overrightarrow{u_r} - v_0\sin(\theta)\ \overrightarrow{u_\theta} = v_0\ \overrightarrow{u_x}}$$

On retrouve bien le profil de vitesse loin du cylindre.
3) Si $r = R$, la vitesse devient :

$$\boxed{\overrightarrow{v} = -2v_0\sin(\theta)\ \overrightarrow{u_\theta}}$$

La composante radiale (selon $\overrightarrow{u_r}$) est nulle car le fluide ne peut pas pénétrer dans le cylindre, il doit nécessairement circuler de manière tangente au cylindre.

Exercice n°6 • Ressort vertical ★⯪☆

1) Attention à l'axe z qui est orienté vers le bas. On a :

$$\boxed{\mathcal{E}_p(z) = -mgz + \frac{1}{2}k\left(z - \ell_0\right)^2}$$

2) On cherche le point d'annulation de la dérivée :

$$\frac{d\mathcal{E}_p}{dz} = -mg + k\left(z - \ell_0\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{z_{eq} = \ell_0 + \frac{mg}{k}}$$

3) On utilise le TPM :

$$\frac{d\mathcal{E}_m}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad m\dot{z}\ddot{z} - mg\dot{z} + k\dot{z}\left(z - \ell_0\right) = 0$$

On pose : $\omega_0 = \sqrt{k/m}$. On a alors :

$$\boxed{\ddot{z} + \omega_0^2 z(t) = \omega_0^2 z_{eq}}$$

Le solution est:

$$\boxed{z(t) = z_0\cos(\omega_0 t) + z_{eq}}$$

Exercice n°7 • Saut à l'élastique en toute sécurité ★⯪☆

Notons $z = 0$ l'altitude du pont et orientons l'axe vertical vers le bas. On applique le TEM entre l'instant initial ($z = 0$, $v = 0$ et élastique non tendu donc pas de force de rappel) et l'instant le plus bas de la chute, où l'homme fait demi-tour ($z = h$ et $v = 0$).

$$\underbrace{0}_{\mathcal{E}_c} + \underbrace{0}_{\mathcal{E}_{p,p}} = \underbrace{0}_{\mathcal{E}_c} + \underbrace{(-mgh)}_{\mathcal{E}_{p,p}} + \underbrace{\frac{k_0}{2\ell_0}\left(h - \ell_0\right)^2}_{\mathcal{E}_{p,el}}$$

Après ré-arrangement des termes, il vient :

$$\ell_0^2 - 2h\lambda\,\ell_0 + h^2 = 0$$

Le discriminant vaut :

$$\Delta = 4h^2\left(\lambda^2 - 1\right) > 0$$

On en déduit les deux solutions :

$$\ell_{0,\pm} = h\left(\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - 1}\right) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\ell_m = h\left(\lambda - \sqrt{\lambda^2 - 1}\right)}$$

On ne garde que la solution avec un signe moins car $\ell_{0,+} > h$ (donc l'homme s'écrase sur le sol). Avec $h = 160$ m, on trouve : $\boxed{\ell_m = 71,4 \text{ m}}$.

Exercice n°8 • Puits de potentiel ★★☆

1) On a un état lié si $\mathcal{E}_m < \max(\mathcal{E}_p) = 0$. Or, l'énergie mécanique (qui se conserve) initial vaut :

$$\mathcal{E}_m = -U_0 + \frac{1}{2}mv_0^2$$

Pour avoir un état lié, il faut donc que :

$$\boxed{v_0 < \sqrt{\frac{2U_0}{m}}}$$

2) On suppose que : $v_0 > \sqrt{\dfrac{2U_0}{m}}$. La conservation de l'énergie mécanique assure que :

$$\mathcal{E}_m = -U_0 + \frac{1}{2}mv_0^2 = \mathcal{E}_p(\infty) + \frac{1}{2}mv_\infty^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{v_\infty = v_0\sqrt{1 - \frac{2U_0}{mv_0^2}}}$$

3) Si $\varepsilon \ll 1$, alors :

$$\mathcal{E}_p = -U_0\left(1+\varepsilon\right)^{-1} = -U_0\left(1-\varepsilon\right) = -U_0 + \frac{U_0}{x_R^2}\,x^2$$

On a bien un potentiel de la force :

$$\mathcal{E}_p = cte + \frac{1}{2}kx^2 \quad \Rightarrow \quad k = \frac{2U_0}{x_R^2}$$

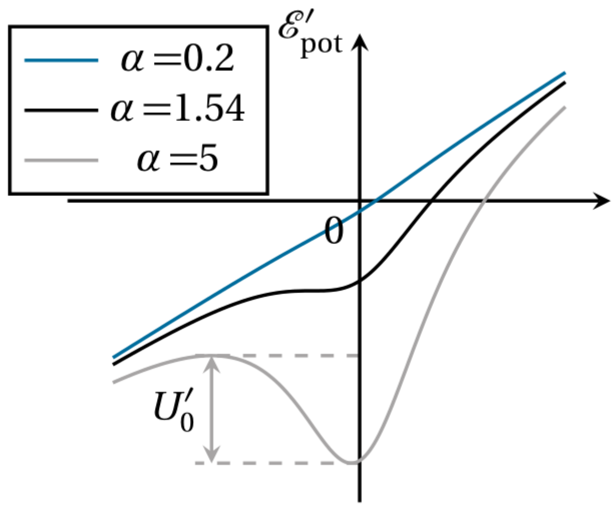
On sait alors que la pulsation propre des oscillations vaut :

$$\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{2U_0}{mx_R^2} = 2,3\cdot 10^{-3} \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}}$$

4) On rajoute l'énergie potentielle de pesanteur $\mathcal{E}_{pp} = mgx = mgx_R\varepsilon$ à l'expression de l'énoncé. On obtient :

$$\mathcal{E}_p(x) = mgx_R\varepsilon - \frac{U_0}{1+\varepsilon^2} = \boxed{mgx_R\left(\varepsilon - \frac{\alpha}{1+\varepsilon^2}\right)}$$

5) On a représenté l'allure de $\mathcal{E}_p$ pour différentes valeurs de α. Pour α faible, on retrouve la droite de l'énergie potentielle de pesanteur, dans laquelle l'énergie potentielle due au laser creuse une indentation d'autant plus grande que α est grand. Si α est suffisamment important, la contribution du laser peut rendre $\mathcal{E}_p$ localement décroissante : on a alors un minimum local d'énergie potentielle, soit un nouvel équilibre stable.



Cela se produit pour :

$$\frac{d\mathcal{E}_p}{d\varepsilon} = 0 = mgx_R\left(1 - \frac{2\alpha\varepsilon}{\left(1+\varepsilon^2\right)^2}\right) \quad \Rightarrow \quad \varepsilon^4 + 2\varepsilon^2 - 2\alpha\varepsilon + 1 = 0$$

On eut montrer que cette équation admet une solution dès que $\alpha > 1,54$.

6) On a :

$$U_0 = \alpha_c mgx_R = k_BT_c \quad \Rightarrow \quad \boxed{T_c = \frac{\alpha_c mgx_R}{k_B} = 3,8\cdot 10^{-6}\ \mu\text{K} < T_0}$$

Cette valeur est bien inférieure à la température de l'énoncé, le système possédera donc bien un minimum local.

7) La profondeur du piège est la grandeur U_0' représentée sur la figure précédente. On détermine les abscisses du minimum x_{min} local et du maximum x_{max} local de $\mathcal{E}_p'$ en annulant sa dérivée. La position d'équilibre est en $x = x_{min}$. La profondeur vaut alors :

$$U_0' = \mathcal{E}_p'(x_{max}) - \mathcal{E}_p(x_{min})$$

Exercice n°9 • Tube en rotation

1) Pour $i = 1, 2, 3$, on a :

$$\overrightarrow{F}_i = -\overrightarrow{\text{grad}}(\mathcal{E}_{pi}) = -\frac{d\mathcal{E}_{pi}}{dr}\overrightarrow{u_r}$$

On en déduit :

$$\boxed{\overrightarrow{F}_1 = \frac{nRT_0}{a+r}\overrightarrow{u_r}} \qquad \boxed{\overrightarrow{F}_2 = -\frac{nRT_0}{a-r}\overrightarrow{u_r}} \qquad \boxed{\overrightarrow{F}_3 = m\omega^2 r\,\overrightarrow{u_r}}$$

2) On a :

$$\mathcal{E}_p'(r) = -\frac{nRT_0}{a+r} + \frac{nRT_0}{a-r} - m\omega^2 r = r\left(\frac{2nRT_0}{a^2-r^2} - m\omega^2\right)$$

On constate que $r_0 = 0$ est bien solution de cette équation. Il s'agit donc d'une position d'équilibre.

3) Cherchons $r \neq 0$ également solution de l'équation. On a :

$$\begin{aligned}
\left(\frac{2nRT_0}{a^2-r^2} - m\omega^2\right) = 0 \quad &\Rightarrow \quad a^2 - r^2 = \frac{2nRT_0}{m\omega^2} \\
&\Rightarrow \quad r^2 = a^2\left(1 - \frac{2nRT_0}{ma^2\omega^2}\right) \\
&\Rightarrow \quad \boxed{r_\pm = \pm\, a\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)^2}}
\end{aligned}$$

Ces solutions existent lorsque $\omega > \omega_c$.

4) Calculons la dérivée seconde $\mathcal{E}_p''(r)$

$$\mathcal{E}_p''(r) = 2nRT_0\frac{(a^2-r^2) - r(-2r)}{(a^2-r^2)^2} - m\omega^2$$

Ainsi,

$$\mathcal{E}_p''(0) = \frac{2nRT_0}{a^2} - m\omega^2 = m\left(\omega_c^2 - \omega^2\right)$$

La position d'équilibre est stable ($\mathcal{E}_p''(0) > 0$) si $\omega < \omega_c$ et instable ($\mathcal{E}_p''(0) < 0$) si $\omega > \omega_c$.

5) L'état d'équilibre stable en 0 correspond au graphe de gauche (minimum de l'énergie potentielle). Donc gauche : $\omega < \omega_c$ et droite : $\omega > \omega_c$.

6) On a :

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_p(r) &\simeq -nRT_0\left[\frac{r}{a} - \frac{1}{2}\left(\frac{r}{a}\right)^2\right] - nRT_0\left[-\frac{r}{a} - \frac{1}{2}\left(-\frac{r}{a}\right)^2\right] - \frac{1}{2}m\omega^2 r^2 \\
&= \frac{2nRT_0}{a^2}r^2 - \frac{1}{2}m\omega^2 r^2 \\
&= \frac{1}{2}m\left(\omega_c^2 - \omega^2\right)r^2
\end{aligned}$$

7) On applique le TPM :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}m\left(\omega_c^2 - \omega^2\right)r^2\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\ddot{r} + \left(\omega_c^2 - \omega^2\right)r = 0}$$

Il s'agit bien d'un oscillateur harmonique de pulsation propre : $\boxed{\omega_0 = \sqrt{\omega_c^2 - \omega^2}}$.

Exercice n°10 • Looping

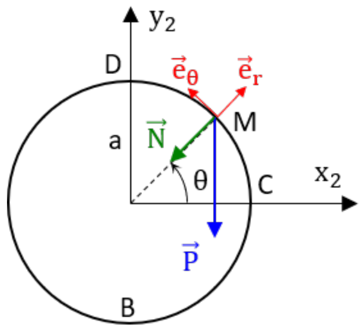
1) On applique le TEM entre les points A et B, sur la voiture, dans le référentiel terrestre supposé galiléen. Seule la réaction normale du support est non conservatrice mais cette force de travail pas. Ainsi,

$$\frac{1}{2}m\underbrace{v_A^2}_{=0} + mg\underbrace{y_A}_{=h} = \frac{1}{2}mv_B^2 + mg\underbrace{y_B}_{=0} \quad \Rightarrow \quad \boxed{v_B = \sqrt{2gh}}$$

2) On applique le TEM entre les points A et M, avec : $y_M = a\left(1 + \sin(\theta)\right)$ et $v_M = a\dot{\theta}$.

$$mgh = \frac{1}{2}mv_M^2 + mgy_M \quad \Rightarrow \quad \boxed{gh = \frac{1}{2}a^2\dot{\theta}^2 + ga\left(1 + \sin(\theta)\right)}$$

3) On définit la base polaire suivante.



Dans cette base :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{P} &= mg\left(-\cos(\theta)\,\overrightarrow{e_\theta} - \sin(\theta)\,\overrightarrow{e_r}\right)\\ \overrightarrow{N} &= -N\overrightarrow{e_r}\\ \overrightarrow{a} &= -a\dot{\theta}^2\overrightarrow{e_r} + a\ddot{\theta}\,\overrightarrow{e_\theta}\end{aligned}$$

On applique le PFD sur la voiture, que l'on projette selon $\overrightarrow{e_r}$.

$$-ma\dot{\theta}^2 = -mg\sin(\theta) - N \quad\Rightarrow\quad N = ma\dot{\theta}^2 - mg\sin(\theta)$$

On remplace $\dot{\theta}^2$ à l'aide de l'expression de la question précédente.

$$N = m\left(\frac{2gh}{a} - 2g\left(1+\sin(\theta)\right)\right) - mg\sin(\theta) = \boxed{mg\left(\frac{2h}{a} - 2 - 3\sin(\theta)\right)}$$

4) N est minimale lorsque le sinus est maximal, donc pour $\theta = \dfrac{\pi}{2}$.

5) En ce point, il faut que N soit toujours strictement positif pour que la voiture ne décolle pas. Ainsi,

$$N_{min} = mg\left(\frac{2h}{a} - 5\right) > 0 \quad\Rightarrow\quad \boxed{h > \frac{5a}{2} = 11,75\ \text{m}}$$

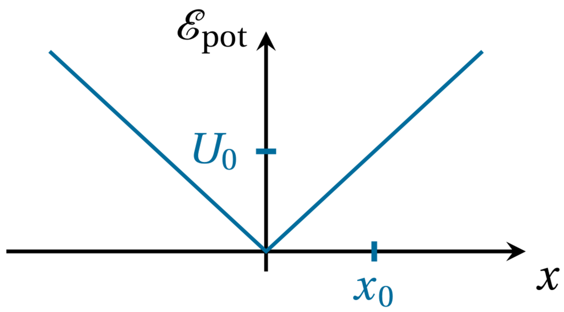
Exercice n°11 • Énergie potentielle linéaire ★★☆

1) On a :

$$\overrightarrow{F} = -\overrightarrow{\text{grad}}(\mathcal{E}_p) = -\frac{d\mathcal{E}_p}{dx}\overrightarrow{u_x} \quad\Rightarrow\quad \mathcal{E}_p = \begin{cases} -F_0 x & \text{si : } x < 0 \\ F_0 x & \text{si : } x > 0 \end{cases}$$

Puisque la fonction est définie et continue en $x = 0$, on en déduit :

$$\boxed{\mathcal{E}_p(x) = F_0\,|x|}$$



2) Puisque $\max(\mathcal{E}_p) = \infty$, on ne sera jamais dans une situation où $\mathcal{E}_m > \max(\mathcal{E}_p)$. Un point matériel sera donc toujours dans un état lié.

3) On écrit la conservation de l'énergie mécanique entre l'état initial ($x = 0$, $v = v_0$) et la position extrémale ($x = x_{max}$, $v = 0$). On a :

$$0 + \frac{1}{2}mv_0^2 = F_0 x_{max} + 0 \quad\Rightarrow\quad \boxed{x_{max} = \frac{mv_0^2}{2F_0}}$$

4) On écrit la conservation de l'énergie mécanique entre l'état initial ($x = 0$, $v = v_0$) et une position quelconque tel que $0 \leqslant x \leqslant x_{max}$. On a :

$$0 + \frac{1}{2}mv_0^2 = F_0 x + \frac{1}{2}mv^2 \quad\Rightarrow\quad \boxed{\dot{x} = v_0\sqrt{1 - \frac{x}{x_{max}}}}$$

5) On en déduit :

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = v_0\sqrt{1 - \frac{x}{x_{max}}} \quad\Rightarrow\quad \boxed{dt = \frac{dx}{v_0\sqrt{1 - \frac{x}{x_{max}}}}}$$

Le mouvement du point matériel de $x = 0$ à x_{max} correspond à un quart de période T. Ainsi,

$$T = 4 \times \int_0^{x_{max}} \frac{dx}{v_0\sqrt{1 - \frac{x}{x_{max}}}} = \frac{4x_{max}}{v_0}\int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1-u}}$$

On a posé : $u = x/x_{max}$. On a donc :

$$T = \frac{4x_{max}}{v_0}\left[-2\sqrt{1-u}\right]_0^1 = \frac{8x_{max}}{v_0} = \boxed{\frac{4mv_0}{F_0}}$$